

## EL1-1

# 1自由度エレベータモデルによるロープ横振動の共振曲線 Resonance Curve of Rope Lateral Vibration based on 1-DOF Elevator Model

○正 渡辺 誠治\*<sup>1</sup>  
Seiji WATANABE\*<sup>1</sup>

\*<sup>1</sup> 三菱電機株式会社 Mitsubishi Electric Corp.

An elevator car is suspended by ropes to move vertically along the elevator shaft. When the car stops at a specific floor in the building, the car might receive a large rope sway due to an enforced motion of the building during a strong wind or a big earthquake. Several modelings of the elevator rope sway have been proposed. One derives a difference equation based on the wave propagation equation of the string vibration to evaluate the resonance behavior of the elevator suspension rope. As another modeling, simplified equations of rope motion are derived against the horizontal and vertical direction. Each equation is expressed as 1-DOF (degree-of-freedom) model and the both vibration modes are coupled with each other. In this paper, the resonance curve of the simplified 1-DOF model is derived by an implicit function. Another equivalent resonance curve is also received by a quadratic equation, which is approximated from the implicit function. The both resonance curves show nonlinear resonance behavior as a softening effect. The nonlinear resonance curve can be derived as a non-dimensional function, and the derived curve corresponds to the numerical simulation result.

**Key Words** : Elevator, Rope sway, String vibration, Nonlinear vibration, Resonance

### 1. 緒 言

強風や地震によって建物が揺れ続けた場合、特定のかご位置においてエレベータロープが大きく横に揺れる、いわゆる共振現象が知られている。このロープ揺れを推定するための解析手法としては、弦振動モデル、多質点モデル、差分方程式モデルなど種々の方法が提案されている<sup>(1)-(3)</sup>。

日本機械学会交通・物流部門の下部組織である昇降機・遊戯施設技術委員会では、研究会活動「エレベータロープ揺れ計算ワーキンググループ」において、エレベータの主ロープを対象として、差分方程式を用いたロープ揺れの計算評価を行っている<sup>(4)</sup>。この報告では、建物高さの違いとして影響するロープ長さを変更した場合における、最大応答倍率や共振周波数などの変化について分析した結果を示している。

一方、著者は、エレベータロープの横振動と縦振動を、それぞれ1自由度の振動モデルと考えた定式化手法について報告している<sup>(5),(6)</sup>。これらの既報では、共振周波数前後におけるロープ横振動の定常値を数値積分により求めることで、共振曲線を導出している。この方法では、共振曲線の導出にシミュレーションによる計算が毎回必要となり、汎用性に欠ける検討内容となっている。そこで、本報告では、数値積分によるシミュレーションを実施することなく、得られた1自由度振動方程式から解析解を直接求めることで、共振曲線を評価した結果について報告する。共振曲線の導出方法としては、縦横連成振動の連立方程式となる1自由度運動方程式から導出される陰関数としての数値解析手法と、陰関数を近似した2次方程式から得られる解析解を用いる手法の2つについて紹介する。

---

\*<sup>1</sup> 正員, 三菱電機株式会社 (〒 661-8661 兵庫県尼崎市 塚口本町 8-1-1)  
E-mail of corresponding author: Watanabe.Seiji@ay.MitsubishiElectric.co.jp

## 2. ロープ振れのモデル

### 2・1 基本の運動方程式

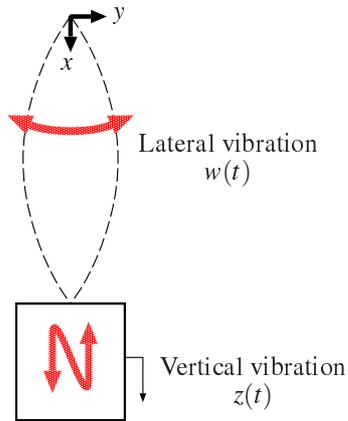


Fig. 1 Rope vibration model

Table 1 Rope sway parameters

$w$	Rope sway displacement
$z$	Vertical displacement of the car
$q_1$	1st mode amplitude of the rope string vibration
$y_b$	Building sway at the top position
$\rho$	Linear density of the rope
$M$	Weight of the car per one rope
$k$	Vertical stiffness of the rope
$E_r$	Rope Young's modulus
$A_r$	Rope cross section area
$L$	Rope length
$g$	Gravity acceleration

エレベータロープの1自由度振動モデルを図1に示す。また、解析に用いるパラメーターを表1に示す。ここで、ロープ上端を座標系原点とし、鉛直下向きを $x$ 方向、水平方向を $y$ 方向と定義している。ロープの縦横振動に関する連成の運動方程式は、以下の2つの式で表現できる<sup>(5)</sup>。

$$\rho \ddot{w} + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 k(z+\Delta) \left(w - \frac{2}{\pi} y_b\right) = 0, \quad w = q_1 + \frac{2}{\pi} y_b, \quad \Delta = \frac{\pi^2}{4L} q_1^2 \quad (1)$$

$$\hat{M} \ddot{z} + k(z+\Delta) = \hat{T} \quad (2)$$

ロープの横方向変位 $w$ は、1次の弦振動モード振幅 $q_1$ と建物頂部の変位 $y_b$ を用いて、式(1)で表される。また、かご上下変位 $z$ は、式(2)で与えられる。ここで、等価質量 $\hat{M}$ と等価張力 $\hat{T}$ は、次式で定義される。

$$\hat{M} = M + \frac{1}{3} \rho L \quad (3)$$

$$\hat{T} = \left(M + \rho \frac{L}{2}\right) g \quad (4)$$

$M, L, \rho, g$ は、かご質量、ロープ長さ、ロープ線密度、重力加速度を表す。また、ロープの鉛直方向剛性 $k$ は、次式で与えられる。

$$k = \frac{E_r A_r}{L} \quad (5)$$

ここで、 $E_r, A_r$ はロープのヤング率、断面積を表す。

### 2・2 かご縦振動の定常解

ロープ横振動の1次モード振幅 $q_1$ を、次式の時間関数として定義する。

$$q_1 = A \cos \omega t \quad (6)$$

ここで $A$ は定数で、振幅の最大値を表す。また、 $\omega$ は建物の振動周波数に対応する。実際には非線形振動のために、ロープ横振動には高調波成分を含むが、その影響は小さいと考えて、基本周波数成分のみを用いることにする。

縦振動の運動方程式(2)に対して、縦振動の定常振動解を次式で与える。

$$z = B \cos 2\omega t + C \quad (7)$$

ここで、式(2)は $\Delta$ を外乱入力とする振動方程式であり、外乱周波数は $2\omega$ となる。また、式(7)の $B, C$ は定数である。なお、横振動の固有振動数 $\omega_h$ に対して、縦振動の固有振動数 $\omega_v$ は十分高いと考えられるため、式(7)において位相ずれは発生しないと仮定する。なお、 $\omega_v$ と $\omega_h$ は、次式で与えられる。

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k}{\hat{M}}}, \quad \omega_h = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\hat{T}}{\rho}} \quad (8)$$

また、縦振動に関する減衰項は影響が小さいと考えて、本検討では無視する。

式(7)を式(2)に代入して、振動成分と定常成分にまとめると、変数  $B, C$  が満足する条件が得られる。

$$B = \frac{k}{\hat{M}(2\omega)^2 - k} \frac{\pi^2 1}{4L^2} A^2, \quad C = \frac{\hat{T}}{k} - \frac{\pi^2 1}{4L^2} A^2 \quad (9)$$

### 2・3 ロープ横振動の支配方程式

横振動の運動方程式(1)をモード振幅  $q_1$  の式に戻した上で、減衰項も追加すると、次式となる。

$$\ddot{q}_1 + 2\zeta_h \omega_h \dot{q}_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 k(z + \Delta) q_1 = -\frac{2}{\pi} \ddot{y}_b \quad (10)$$

ここで  $\zeta_h$  は、横振動の減衰比を表す。式(10)の左辺第3項は剛性項であり、張力に相当する  $k(z + \Delta)$  を書き直すと次式を得る。

$$\ddot{q}_1 + 2\zeta_h \omega_h \dot{q}_1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left\{ k \frac{\pi^2 1}{4L^2} A^2 \frac{(2\omega)^2}{(2\omega)^2 - \omega_v^2} \cos 2\omega t + \hat{T} \right\} q_1 = -\frac{2}{\pi} \ddot{y}_b \quad (11)$$

これより、 $q_1$  の係数項が、モード振幅の最大値  $A$  を含んだ振動成分として与えられることがわかる。

### 2・4 増幅率(共振倍率)の計算

$q_1$  の振動解である式(6)を式(11)に改めて代入することで、次の関係式が得られる。

$$-\omega^2 A \cos \omega t - 2\zeta_h \omega_h \omega A \sin \omega t + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left\{ k \frac{\pi^2 1}{4L^2} A^2 \frac{(2\omega)^2}{(2\omega)^2 - \omega_v^2} \cos 2\omega t + \hat{T} \right\} A \cos \omega t = \frac{2}{\pi} D \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

ここで建物外乱  $y_b$  は、建物頂部における最大変位量  $D$  の正弦波として与えられ、ロープ横振動のモード振幅  $q_1$  に対して、位相  $\phi$  だけずれているとする。

$$y_b = D \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

式(12)に対して、基本周波数成分  $\cos \omega t, \sin \omega t$  の関係が常に成立するための条件として、次式が得られる。

$$\left\{ -\omega^2 + \omega_h^2(1 - P) + \frac{3}{4} 2P\omega_h^2 \right\} A = \frac{2}{\pi} D \omega^2 \cos \phi \quad (14)$$

$$2\zeta_h \omega_h \omega A = \frac{2}{\pi} D \omega^2 \sin \phi \quad (15)$$

ここで、新たな変数  $P$  を定義している。

$$P = \frac{k \pi^2 1}{\hat{T} 4L^2} A^2 \frac{(2\omega)^2}{(2\omega)^2 - \omega_v^2} \quad (16)$$

式(14)、式(15)を2乗して足し合わせることで、位相  $\phi$  に関する情報を消去できる。

$$\left[ \left\{ -\omega^2 + \omega_h^2(1 - P) + \frac{3}{4} 2P\omega_h^2 \right\}^2 + (2\zeta_h \omega_h \omega)^2 \right] A^2 = \left( \frac{2}{\pi} D \omega^2 \right)^2 \quad (17)$$

ロープ横振動のモード振幅  $q_1$  に対する建物の等価入力、 $\frac{2}{\pi} D$  として与えられる。この等価入力に対する、ロープ横振動を表す1次振動モード振幅  $A$  の比は、横振動の増幅率(共振倍率)となる。この増幅率の2乗を新たな変数  $\Gamma$  として定義する。

$$\Gamma = \left( \frac{A}{\frac{2}{\pi} D} \right)^2 \quad (18)$$

また、建物周波数とロープ横振動周波数の比を2乗した値に対して、新たな変数  $\Omega$  を定義する。

$$\Omega = \left( \frac{\omega}{\omega_h} \right)^2 \quad (19)$$

式(18)、式(19)を式(17)に代入して整理すると、建物外乱周波数  $\omega$  の関数である  $\Omega$  を入力とした、増幅率 ( $\sqrt{\Gamma}$ ) を求めることができる。

$$\Psi(\Omega, \Gamma) = \left[ -\Omega + 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{kD}{\hat{T}} \right) \left( \frac{D}{L} \right) \frac{\Omega}{\Omega - \{\omega_v / (2\omega_h)\}^2} \Gamma \right]^2 + (2\zeta_h)^2 \Omega - \Omega^2 / \Gamma = 0 \quad (20)$$

式(20)は、 $\Omega, \Gamma$  を引数とする陰関数  $\Psi$  である。

### 3. 共振曲線の比較

以下では、表2に示す条件で、建物上部(ロープ上端)に正弦波の強制変位加振入力( $y_b$ )を与え、ロープ振れの定常振幅を数値計算(数値積分による時間応答解析のシミュレーション)により求めた結果について示す。なお、計算ではロープ1本での評価を実施している。

ロープ長さ  $L = 20, 40, 60, 80\text{m}$  に対する計算結果を図2に示す。ここで、建物の強制変位加振の最大値  $D$  は、 $L = 20, 40\text{m}$  の条件において  $D = 2, 10, 20\text{mm}$  とし、 $L = 60, 80\text{m}$  の条件では、 $D = 2, 20, 100\text{mm}$  で計算している。

Table 2 Simulation parameters (\* referred to paper<sup>(7)</sup>)

Enforced input	$D$ [mm]	2, 10, 20, 100
Rope length	$L$ [m]	20, 40, 60, 80
Rope linear density	$\rho$ [kg/m]	0.494
Car weight	$M$ [kg]	200
Lateral damping ratio	$\zeta_h$ [%]	0.2
Vertical damping ratio	$\zeta_v$ [%]	1.0
Rope Young's modulus*	$E_r$ [GPa]	51.45
Rope cross section area*	$A_r$ [mm <sup>2</sup> ]	52.1

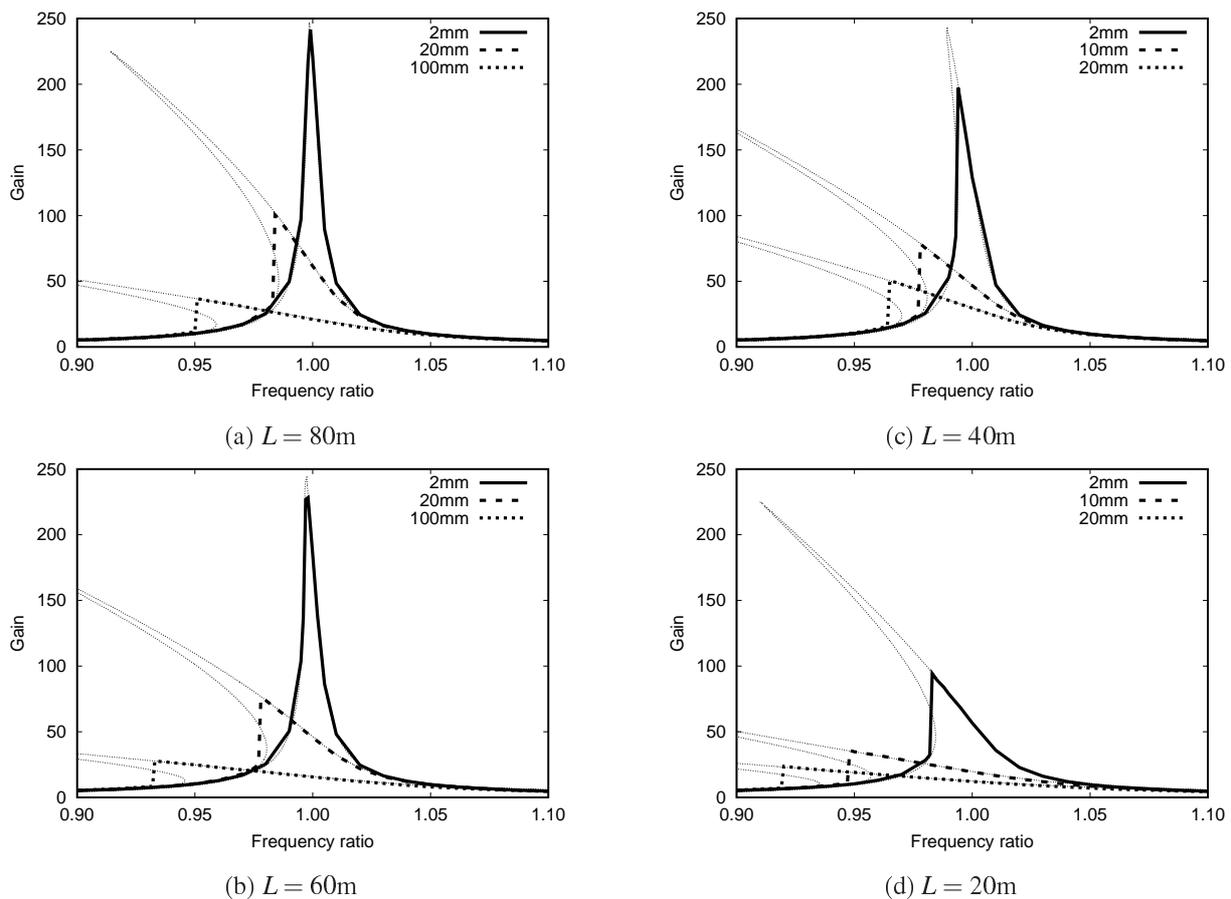


Fig. 2 Comparison between numerical simulation and theoretical solution

グラフの太線が数値計算の結果であり、ロープ横振動の固有振動数  $\omega_h$  に対する建物周波数  $\omega$  の比 ( $\sqrt{\Omega}$ ) を横軸として、建物の等価加振入力に対するロープ振れの最大値の比、すなわち増幅率  $\sqrt{T}$  を縦軸に表示している。建物入力が微小な場合、線形応答の共振倍率  $1/(2\zeta_h) = 250$  に近い値を示す。一方、建物入力が大きくなると、共振周波数が低周波側にずれていく非線形効果(ソフトニング特性)が見られ、増幅率の最大値も低下していく。

一方、式 (20) の陰関数に対する解を数値的に求めた結果が、細い点線となる。1 自由度の運動方程式を数値積分することで得られた太線の数値計算結果に対して、陰関数の解である細い点線の共振曲線が一致していることがわかる。なお、非線形性の強い領域では、シミュレーションで跳躍現象が発生している。すなわち、陰関数で得られる高い増幅率の解には到達せずに、途中で低い増幅率の値に落ち着いている。

#### 4. 共振曲線の近似解法

式 (20) の陰関数に対する解を求めるには数値計算が必要となり、見通しが悪い。そこで、式 (20) を簡易化して、2 次方程式で解を一意に求める。式 (20) の大括弧内の第 3 項が複雑な構成で、 $\Omega$  の関数として定義されていることから、この項を簡素化する。対象とする周波数範囲は、共振点付近のみであることから、第 3 項の  $\Omega$  を共振条件である 1 に固定しても、大きなずれは生じないと考えられる。そこで、新たな変数  $Q$  を定義する。

$$Q = \frac{1}{4} \left( \frac{kD}{T} \right) \left( \frac{D}{L} \right) \frac{1}{1 - \{\omega_v / (2\omega_h)\}^2} \quad (21)$$

$Q$  は無次元化された変数であり、力、変位、周波数の無次元化量の積となっている。エレベータの仕様と建物頂部の最大振幅  $D$  が与えられれば、 $Q$  の値を一意に決定できる。 $Q$  を用いて式 (20) を書き直すと次式となる。

$$\Psi(\Omega, \Gamma) \approx (-\Omega + 1 + Q\Gamma)^2 + (2\zeta_h)^2 \Omega - \Omega^2 / \Gamma = 0 \quad (22)$$

式 (22) は、減衰比  $\zeta_h$  を固定にすれば、 $Q$  を無次元パラメータとする  $\Omega$  の 2 次方程式となる。

$$(1 - 1/\Gamma)\Omega^2 + 2\{2\zeta_h^2 - (1 + Q\Gamma)\}\Omega + (1 + Q\Gamma)^2 = 0 \quad (23)$$

これより、 $\Omega$  の一般解が、 $\Omega_1, \Omega_2$  として得られる。この式は、増幅率 ( $\sqrt{\Gamma}$ ) を変数として、建物周波数  $\omega$  とロープ横振動周波数  $\omega_h$  の比の 2 乗である  $\Omega$  を求めることに相当する。よって、増幅率 ( $\sqrt{\Gamma}$ ) を横軸に、周波数比 ( $\sqrt{\Omega}$ ) を縦軸として、 $\sqrt{\Omega_1}$  と  $\sqrt{\Omega_2}$  のグラフを表示すると、図 3 が得られる。

そこで、図 3 の縦軸と横軸を入れ替えて、式 (20) の理論解に重ねて表示すると、図 4 が得られる。これより、共振点付近の応答は、近似解と理論解の結果がほぼ一致していることがわかる。なお、非線形特性を示す増幅率が急峻に増大していく領域では、周波数にずれが見られている。しかしながら、この領域は不安定で現実には存在しえないことから、本検討では、このずれを問題視しない。

図 2 による数値計算との比較結果から、今回の増幅率最大となる評価点は、図 4 の○印と考えて良いため、両者の値はほぼ一致していると言える。図 4 の○印は、 $\sqrt{\Omega_2}$  の最大周波数比  $\sqrt{\Omega_{2max}}$  (図 3 の一点鎖線) を求めた後で、 $\sqrt{\Omega_1}$  が  $\sqrt{\Omega_{2max}}$  を通過する増幅率  $\sqrt{\Gamma_{target}}$  として、容易に得ることができる。

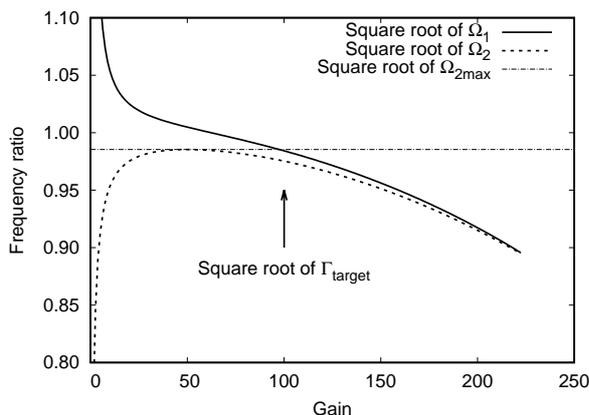


Fig. 3 Solution of two quadratic equations ( $L = 80\text{m}$ ,  $D = 20\text{mm}$ )

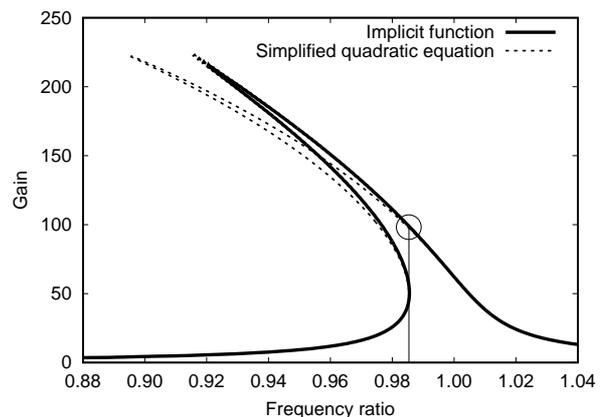


Fig. 4 Comparison between implicit function and quadratic equation

#### 5. 増幅率の無次元化

式 (21) で示す無次元パラメータ  $Q$  を用いれば、エレベータの仕様によらず、統一的な検討を行うことができると考えられる。よって、横軸を  $Q$  の絶対値 ( $Q$  は負の値をもつ) として、縦軸を増幅率の最大値  $\sqrt{\Gamma}$  (図 4 の○印)

で整理すると、図5を得る。既報<sup>(6)</sup>では、無次元化した結果に若干のばらつきが見られていたが、本手法で導出した無次元パラメータ $Q$ を採用することで、種々のエレベータ仕様・建物の加振条件によらず、1つの曲線に集約できる。

無次元化した入力 $Q$ が小さい場合、増幅率は一定値となる。この値は、一点鎖線で示す線形応答解析で得られる増幅率と一致しており、 $1/(2\zeta_h) = 250$ となる。さらに、近似解の結果である点線と理論解の実線は、ほぼ重なっている。これより、数値積分計算を行うことなく、無次元化した増幅率の曲線を容易に求めることができる。

なお、横軸の入力 $Q$ が大きい領域に対して、□印で示すシミュレーション結果の方が若干大きめの増幅率となっている。この理由は図4で求めた増幅率の値(図中の○印)よりも、図2で示すシミュレーションでは若干低周波側で最大値となっているためである。

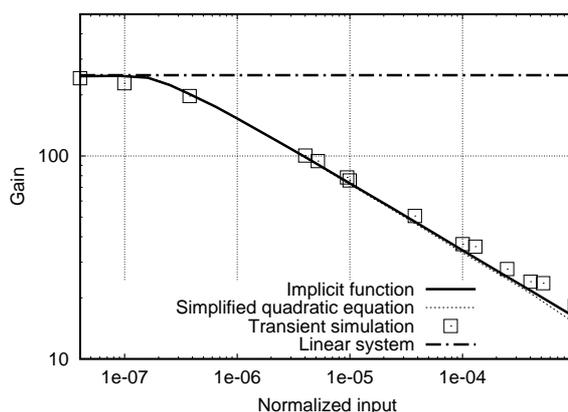


Fig. 5 Magnitude of rope sway against normalized input  $Q$

## 6. 結 言

本報告では、エレベータの主ロープを対象として、縦横連成振動を考慮した1自由度振動モデルに対する共振曲線を解析的に導出した結果について示した。解析手法として、陰関数を用いて数値的に解を求める方法と、2次方程式に近似して解析解を求める方法を提案し、どちらも数値積分のシミュレーションとして得られた共振曲線の結果とほぼ対応することを確認できた。

さらに、得られた解析解を元に、増幅率(共振倍率)の最大値を無次元化して評価する方法を求めた。ロープ長さ、かご質量、ロープ線密度、ヤング率など、ロープ仕様によらず、一律に評価できる無次元化の入力量を導出した後、得られた無限化入力により、増幅率が一つの曲線として与えられることを確認した。

## 文 献

- (1) 渡辺誠治, 瀧川行洋, "エレベーターロープの非線形振動解析", 交通・物流部門大会講演論文集, (2002), pp.407-408.
- (2) 伊東弘晃, 森下明平, "ロープ縦横連成振動系のモデリング", 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2003), pp.1-4.
- (3) 木村弘之, "変位拘束部材を有するエレベータ・ロープの振動解析(両端から対称に2個配置された場合)", Dynamics and Design Conference 講演論文集, (2019), 150.
- (4) 昇降機システムの安全・安心問題研究会, "エレベーターロープ振れの計算手法と共振時の応答倍率評価", [No.19-345] 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2020), pp.37-42.
- (5) 渡辺誠治, "エレベーターロープの縦横連成振動メカニズム", [No.19-345] 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2020), pp.43-48.
- (6) 渡辺誠治, "1自由度エレベータモデルによるロープ横振動の評価", [No.20-61] 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2020), No.6109.
- (7) 金子元樹, 中川淳一, 新井晋治, "エレベーターロープの横振動モデルの実験検証", 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2003), pp.1-4.