

## エレベーターロープの縦横連成振動メカニズム Coupled Vibration Mechanism between Vertical and Horizontal Direction against Elevator Rope

○正 渡辺 誠治<sup>\*1</sup>  
Seiji WATANABE<sup>\*1</sup>

<sup>\*1</sup> 三菱電機株式会社 Mitsubishi Electric Corp.

The elevator car is suspended by ropes to move vertically along the elevator shaft. When the car stops at a specific floor in the building, the car might receive a large rope sway due to the enforced motion of the building during a strong wind or a big earthquake. In general, the rope sway motion doesn't show a linear vibration characteristic, but the resonance peak shows softening stiffness or hardening stiffness. In this paper, simplified equations of rope motion are derived against the horizontal and vertical direction. Each equation is expressed as 1-DOF model and the both vibration modes are coupled with each other. It is found that the coupled vibration induces the nonlinear vibration behavior.

**Key words** : Elevator, Rope tension, String vibration, Rope sway, Coupled vibration, Equation of motion

### 1. 緒 言

エレベータは、ロープで吊り下げられたかごを上下に駆動するシステムであり、ロープが昇降路全域で運動する。建物が強風や地震によって揺れ続けた場合、特定のかご位置においてロープの横揺れ周期と建物の振動周期が近接することで、非常に大きなロープ横揺れが生じることがある。この共振現象に対し、どの程度のロープ横揺れが生じるかを定量的に把握することは、エレベータを安全に運行する上で非常に重要である。そのため、ロープ横揺れを推定あるいは検知することで、エレベータの走行可否を適切に判断する長周期管制運転が導入されている。

ロープ揺れを推定するための解析手法としては、弦振動モデル、多質点モデル、差分方程式モデルなど種々のモデルが提案されている<sup>(1)-(3)</sup>。しかしながら、いずれの方法も複雑な数値解析による評価が必要であり、振動現象を振動方程式の構成から把握することが困難である。そこで、本論文では、エレベーターロープの横振動と縦振動を、それぞれ1自由度の振動モデルと考えた定式化手法について提案する。得られたモデルは、横変位と縦変位が互いに連成する振動方程式となっている。

得られた振動方程式を用いて、ロープに与える外乱周波数を変えていくと、ロープは線形の共振特性ではなく、共振ピークが低周波側に移動するソフトニング、あるいは高周波側に移動するハードニングといった非線形振動特性を示すことが明らかになった。さらに、かごの縦振動がロープの横振動に与える影響を考察することにより、非線形振動特性が生じるメカニズムを述べる。

### 2. ロープ横振動の定式化

エレベーターロープの縦横連成振動モデルを図1に示す。ここで、ロープ上端を座標系原点とし、鉛直下向きを  $x$  方向、水平方向を  $y$  方向と定義している。まずロープ横振動に対し、微小区間  $\delta x$  における運動方程式を導出する。垂直位置  $x$  におけるロープ張力を  $T(x)$  とすると、微小区間  $\delta x$  における張力関係は、図2で与えられる。

<sup>\*1</sup> 正員, 三菱電機株式会社 (〒661-8661 兵庫県尼崎市 塚口本町 8-1-1)  
E-mail of corresponding author: Watanabe.Seiji@ay.MitsubishiElectric.co.jp

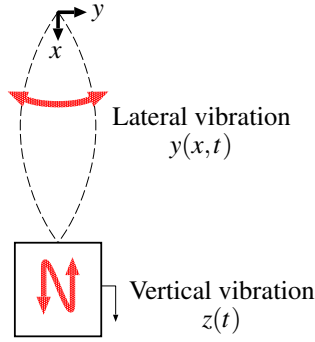


Fig. 1 Rope vibration model

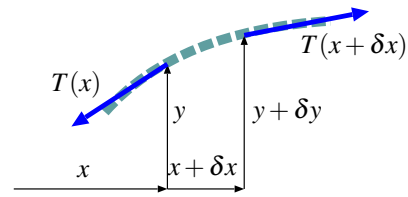


Fig. 2 Rope tension model

図2の張力関係から運動方程式を導出すると次式を得る。

$$(\rho \delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x+\delta x} - T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x} \quad (1)$$

ここで、 $\rho$  はロープ線密度、 $y$  はロープの水平方向変位を表し、時間  $t$  と鉛直位置  $x$  の関数である。式(1)の左辺は、微小区間  $\delta x$  における慣性力を表し、右辺は張力による一般化力を表す。右辺第1項を Taylor 級数展開し、1次の項のみを取り出すと次式を得る。

$$(\rho \delta x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta x - T \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x} + O(\delta x^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) \delta x \quad (2)$$

以下では、簡単のため減衰項を無視した式展開を行う。また、ロープの大変形に伴う高次項  $y^2$  は無視し、 $y$  の1次項のみが支配的であると考えて定式化を行う。式(2)から、以下の弦振動の式が得られる。

$$\rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ T(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right\} \quad (3)$$

水平変位  $y$  は、ロープの弦振動成分  $y_1$  と、建物からの強制変位  $y_2$  の足し合わせで表現される。

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \quad (4)$$

$$y_1(x,t) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \phi_i(x) = \sum_{i=1}^N q_i(t) \sin \left( \frac{\pi i}{\ell} x \right) \quad (5)$$

$$y_2(x,t) = \frac{\ell - x}{\ell} d_b(t) \quad (6)$$

ここで、 $y_1$  は、ロープ両端で変位0となる弦振動の重ね合わせであり、 $\phi_i(x)$  が  $i$  次のモード形状関数、 $q_i(t)$  が  $i$  次のモード振幅を表す。また、 $y_2$  は、ロープ下端の建物変位が0で、ロープ上端の建物変位を  $d_b$  とし、その間の建物変位を線形補間した式である。なお、式(5)、式(6)で、 $\ell$  はロープ長さを表す。

簡単のため、エレベータのかごが静止している場合のロープ張力に対する定式化を行う。かごの質量を  $M$  とすると、ロープ上端からの位置  $x$  における張力は、次式で与えられる。

$$T(x) = \{M + \rho(\ell - x)\}g \quad (7)$$

ここで、 $g$  は重力加速度を表す。

式(5)で、モードは1次のみを考慮するとして、式(3)に、式(5)、(6)、(7)を代入する。

$$\rho \left( \ddot{q}_1 \phi_1 + \frac{\ell - x}{\ell} \ddot{d}_b \right) = \frac{dT}{dx} \left( q_1 \frac{d\phi_1}{dx} - \frac{d_b}{\ell} \right) + T \left( q_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) = -\rho g \left( q_1 \frac{d\phi_1}{dx} - \frac{d_b}{\ell} \right) + T \left( q_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \right) \quad (8)$$

式(8)に、モード関数  $\phi_1(x)$  をかけて積分すると次式が得られる。

$$\rho \ddot{q}_1 \int_0^\ell \phi_1^2 dx + \rho \ddot{d}_b \int_0^\ell \frac{\ell - x}{\ell} \phi_1 dx = -\rho g q_1 \int_0^\ell \frac{d\phi_1}{dx} \phi_1 dx + \rho g \frac{d_b}{\ell} \int_0^\ell \phi_1 dx + q_1 \int_0^\ell T \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} \phi_1 dx \quad (9)$$

ここで、1 次のモード形状関数を  $\phi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$  とすると、式(7)を用いて式(9)は次式となる。

$$\left\{ \rho \ddot{q}_1 + Mg \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1 \right\} \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx + \rho g \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1 \int_0^\ell (\ell-x) \sin^2\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx \\ + \rho g q_1 \frac{\pi}{\ell} \int_0^\ell \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx + \rho \ddot{d}_b \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx - \rho g \frac{d_b}{\ell} \int_0^\ell \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) dx = 0 \quad (10)$$

式(10)を整理すると、以下で示すモード方程式が得られる。

$$\left\{ \rho \ddot{q}_1 + Mg \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1 \right\} \frac{\ell}{2} + \rho g \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1 \frac{\ell^2}{4} + \rho \ddot{d}_b \frac{\ell}{\pi} - \rho g d_b \frac{2}{\pi} = 0 \quad (11)$$

ここで、ロープ質量を含めた等価張力  $\hat{T}$  を次式で定義する。

$$\hat{T} = \left( M + \rho \frac{\ell}{2} \right) g \quad (12)$$

式(12)を用いて式(11)を整理すると次式を得る。

$$\rho \left( \ddot{q}_1 + \frac{2}{\pi} \ddot{d}_b \right) + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \hat{T} q_1 = \rho g d_b \frac{4}{\pi \ell} \quad (13)$$

新しい状態変数として、以下の変数変換を行う。

$$w = q_1 + \frac{2}{\pi} d_b \quad (14)$$

式(13)の右辺は、左辺第2項で示す張力項に比べて無視できると考えると、式(13)は次式となる。

$$\rho \ddot{w} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \hat{T} \left( w - \frac{2}{\pi} d_b \right) = 0 \quad (15)$$

式(15)は、強制変位  $d_{in} = 2d_b/\pi$  を受ける弦振動の方程式となっている。また、式(12)より、ロープ質量の半分をロープ下端の質量(すなわちかご質量)に付加すれば、ロープ重量を考慮した弦振動の定式化になることがわかる。なお、横振動の固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega_h = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{\hat{T}}{\rho}}, \quad f_h = \frac{\omega_h}{2\pi} \quad (16)$$

### 3. ロープ縦振動の定式化

図1で示すロープ縦振動の定式化を行う。まず、ロープの鉛直方向剛性を次式で与える。

$$k = \frac{EA}{\ell} \quad (17)$$

ここで、 $E, A$  はロープのヤング率、断面積を表す。

かごの上下変位を  $z$  とし、ロープの伸びがロープ位置  $x$  に対して線形に変化すると仮定すると、ロープの微小区間  $\delta x$  における運動エネルギーは次式で与えられる。

$$\delta T_r = \frac{1}{2} (\rho \delta x) \left( \frac{x}{\ell} \dot{z} \right)^2 \quad (18)$$

よって、ロープの全運動エネルギーは次式で与えられる。

$$T_r = \int_0^\ell \delta T_r = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{\dot{z}}{\ell} \right)^2 \int_0^\ell x^2 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \rho \ell \right) \dot{z}^2 \quad (19)$$

一方、かごの運動エネルギーは次式となる。

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 \quad (20)$$

ロープとかごによる全運動エネルギー  $T_{total}$ 、ロープ剛性によるポテンシャルエネルギー  $U$  は次式となる。

$$T_{total} = T_r + T_c = \frac{1}{2} \left( M + \frac{1}{3} \rho \ell \right) \dot{z}^2, \quad U = \frac{1}{2} k z^2 \quad (21)$$

これより、かご上下変位  $z$  を変数とする Lagrange の運動方程式を得る。

$$\hat{M}\ddot{z} + kz = F \quad (22)$$

ここで、 $\hat{M}$  は縦振動に関する等価質量、 $F$  は重力による一般化力を表す。式 (21) より、等価質量  $\hat{M}$  は次式で与えられる。

$$\hat{M} = M + \frac{1}{3}\rho\ell \quad (23)$$

一般化力  $F$  については、式 (12) で導出した等価張力を満足する必要があるため、次式が成立する。

$$F = \hat{T} \quad (24)$$

なお、縦振動の固有振動数は次式で与えられる。

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k}{\hat{M}}}, \quad f_v = \frac{\omega_v}{2\pi} \quad (25)$$

#### 4. ロープの縦横連成振動モデル

前節までに導出した振動方程式は、横振動・縦振動を独立に求めた非連成の式である。しかしながら、実際には横振動と縦振動は連成しているため、本節では連成効果を考慮した式への補正を行う。

ロープが横方向に揺れると、幾何学的な関係から、かごが引き上げられる。この時の引き上げ量は次式となる。

$$\Delta = \int_0^\ell \left\{ \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} - \delta x \right\} = \int_0^\ell \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1 \right\} dx \quad (26)$$

右辺を Taylor 級数展開し、1 次項まで取り出すと次式を得る。

$$\Delta = \int_0^\ell \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \quad (27)$$

$y(x, t) = q_1(t)\phi_1(x)$  を代入すると、次式となる。

$$\Delta = \frac{1}{2}q_1^2 \int_0^\ell \left(\frac{d\phi_1}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1^2 \int_0^\ell \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{\ell}x\right) \right\}^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 q_1^2 \frac{\ell}{2} = \frac{\pi^2}{4\ell} q_1^2 \quad (28)$$

仮にかごが上下に動かない場合、上記の引き上げ量  $\Delta$  は、ロープ剛性による伸び量としてロープ張力を増加させる効果となる。よって、この引き上げ量  $\Delta$  を縦の運動方程式 (22) に取り込む。

$$\hat{M}\ddot{z} + k(z + \Delta) = F \quad (29)$$

式 (29) から得られるロープ張力  $T_v$  は、重力による一般化力  $F (= \hat{T})$  と、等価質量  $\hat{M}$  の慣性力から求められる。

$$T_v = k(z + \Delta) = \hat{T} - \hat{M}\ddot{z} \quad (30)$$

横振動の運動方程式 (15) は、張力として式 (12) で示す重力による静荷重  $\hat{T}$  を用いている。しかしながら、実際にはかごの縦振動による張力変動を受けるため、式 (15) は式 (30) の張力に置き換える必要がある。なお、式 (30) は時間の関数であるため、式 (15) の  $\hat{T}$  と置き換えるだけでは厳密に正しくないが、近似評価としては妥当と考えられる。

まとめると、ロープの縦横振動に関する連成の運動方程式は、式 (15)、式 (22) を修正して、以下の 2 つの方程式として表現できる。

$$\rho\ddot{w} + \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 k(z + \Delta) \left(w - \frac{2}{\pi}d_b\right) = 0, \quad w = q_1 + \frac{2}{\pi}d_b, \quad \Delta = \frac{\pi^2}{4\ell} q_1^2 \quad (31)$$

$$\hat{M}\ddot{z} + k(z + \Delta) = \hat{T} \quad (32)$$

これより、ロープ横振動は、ロープ張力変動を介して縦振動と連成し、ロープ縦振動は、ロープ横揺れによる引き上げ量を介して横振動と連成していることになる。

### 5. 数値計算結果

式(31),式(32)を用いて,縦振動が横振動に与える影響について評価する.ここでは,2自由度が連成した2階の微分方程式に対して,数値積分を行うことでロープ横揺れの共振倍率を計算する.

式(32)に加わる外力は,横振動の2乗項  $\Delta = (\pi^2/(4\ell))q_1^2$  であるため,横振動の2倍の周波数でかごを上下加振することになる.そこで,縦振動の固有振動数 ( $\omega_v$ ) と,横振動固有振動数の2倍 ( $2\omega_h$ ) の比率を変えて計算を行う.なお,計算では縦振動,横振動のそれぞれに減衰項を与えている.計算に用いたパラメーターを表1に,計算条件を表2に示す.

Table 1 Simulation parameters

Eigen frequency of lateral vibration	$f_h$	0.5Hz
Damping ratio of lateral vibration	$\zeta_h$	0.01
Damping ratio of vertical vibration	$\zeta_v$	0.10
Building swaying displacement	$d_b$	0.1m

Table 2 Simulation condition

Case A	$\omega_v \ll 2\omega_h$ ( $2\omega_h/\omega_v = 7.7$ )
Case B	$\omega_v < 2\omega_h$ ( $2\omega_h/\omega_v = 1.5$ )
Case C	$\omega_v > 2\omega_h$ ( $2\omega_h/\omega_v = 0.5$ )

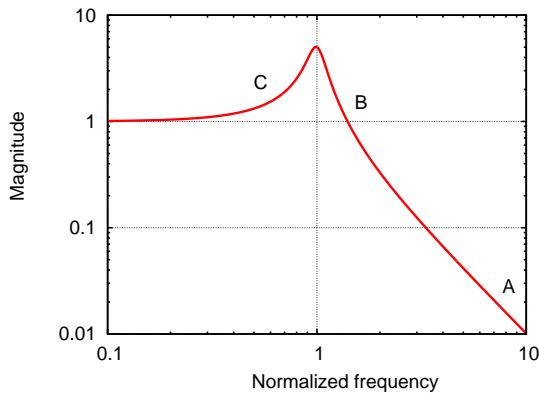


Fig. 3 Frequency response of vertical vibration

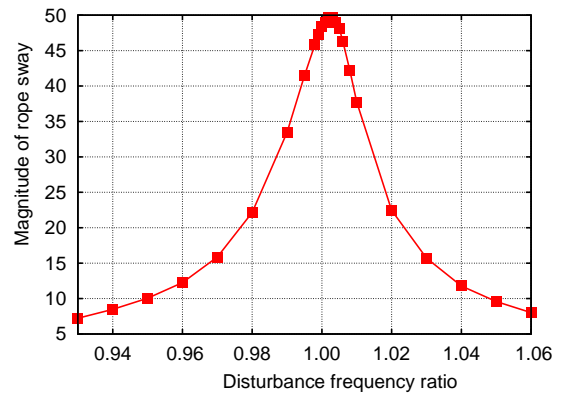


Fig. 4 Quite low stiffness condition (Case A)

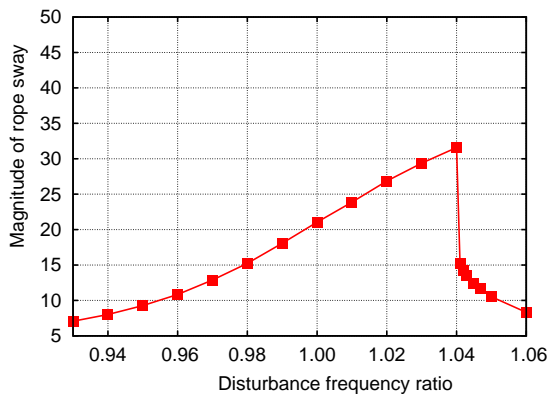


Fig. 5 Low stiffness condition (Case B)

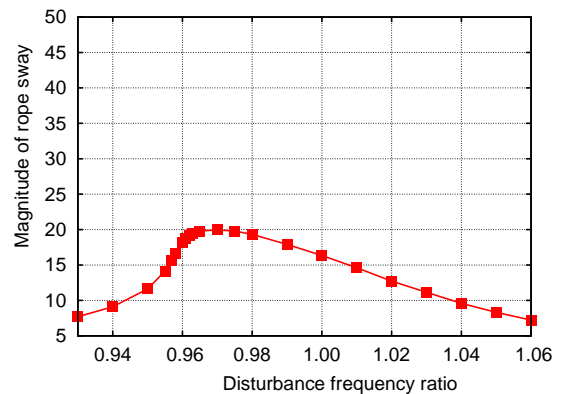


Fig. 6 High stiffness condition (Case C)

図3は,ロープ縦振動の伝達特性を示している.横軸は共振周波数で正規化しており,表2で示す外乱周波数 ( $2\omega_h$ ) との関係をも A, B, C として表している.

Case A は,ロープ剛性を十分低くした場合であり,この時の横振動の共振特性は図4となる.この場合,図3で示す通り,かごはほとんど動かないため,連成効果は失われ,ロープの横方向の伸びによる張力増大効果のみが生じる.しかしながら,ロープ剛性が十分低いため,この張力増大効果も小さく無視できる.よって,横振動の共振特性はほぼ線形系と等価になる.この時の最大共振倍率は  $1/(2\zeta_h) = 50$  となる.

次に,図5は,外乱周波数 ( $2\omega_h$ ) が縦の固有振動数  $\omega_v$  よりも高い Case B の結果を示している.この場合,ロープの横揺れによるかごの引き上げ動作に対して,かごの上下変位は位相が180度ずれた応答を示す.そのために,

ロープが横に変位することでかごを引き上げようとしても、かごは下向きに変位する。よって、ロープを伸ばす方向にかごが変位することでロープの張力を増やす作用が生じる。張力が増大すると横の固有振動数  $\omega_h$  は周波数が増大するため、共振特性のピークは高周波側に移動するハードニング特性を示すことになる。

最後に外乱周波数 ( $2\omega_h$ ) が縦の固有振動数  $\omega_v$  よりも低い Case C の結果を図 6 に示す。この場合、ロープの横揺れによるかごの引き上げ動作に対して、かごの上下変位は同位相で追従する。また、幾何学的な引き上げ量以上にかごの上下振動が生じることで、よりかごは上昇することになる。そのため、ロープを緩める方向にかごが変位することでロープの張力を減らす作用が生じる。張力が低下すると横の固有振動数  $\omega_h$  は周波数が低下するため、共振特性のピークは低周波側に移動するソフトニング特性を示すことになる。

なお、文献<sup>(2)</sup>では、縦と横の固有振動数を変えた試験を実施しており、図 5、図 6 と同様の共振特性を示しており、今回導出した振動方程式の妥当性を裏付けている。

## 6. 結 言

本論文では、ロープの横振動・縦振動それぞれに対する等価 1 自由度振動方程式の定式化について述べた。導出した式は、ロープの質量を考慮した等価張力、等価質量で構成され、2つの振動方程式は互いに状態変数が連成する非線形振動特性を示すことを明らかにした。

また、横振動と縦振動の固有振動数の関係から、以下の事象を明らかにすることができた。

1. 縦振動の固有振動数が横振動固有振動数の 2 倍よりも十分低い場合 (ロープの剛性が十分低い場合)、横振動の共振特性は線形特性に近づき、最大ピークが増大する。
2. 縦振動の固有振動数が横振動固有振動数の 2 倍よりも低い場合、横振動の共振特性は共振周波数が高周波側に移動するハードニング特性を示す。
3. 縦振動の固有振動数が横振動固有振動数の 2 倍よりも高い場合、横振動の共振特性は共振周波数が低周波側に移動するソフトニング特性を示す。

## 文 献

- (1) 渡辺誠治, 瀧川行洋, "エレベーターロープの非線形振動解析", 交通・物流部門大会講演論文集, (2002), pp.407-408.
- (2) 伊東弘晃, 森下明平, "ロープ縦横連成振動系のモデリング", 昇降機・遊戯施設等の最近の技術と進歩講演論文集, (2003), pp.1-4.
- (3) 木村弘之, "変位拘束部材を有するエレベータ・ロープの振動解析 (両端から対称に 2 個配置された場合)", Dynamics and Design Conference 講演論文集, (2019), 150.