

可動する零自由度機構の解析

杉原 知道^{*1}, 能美 承太郎^{*2}

Mobility Analysis of Zero-DOF Mechanism That Moves

Tomomichi Sugihara^{*1} and Jotaro Noumi^{*2}^{*1}Department of Adaptive Machine Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University
2-1 Yamadaoka, Suita, Osaka 565-0871, Japan^{*2}Department of Adaptive Machine Systems, Graduate School of Engineering, Osaka University (completed)

A novel method to analyze a mechanism is proposed particularly in order to prove that the mechanism is zero-DOF. This work is motivated from an existing parallel mechanism that largely moves and is guessed to be zero-DOF in theory. Once a solution of the kinematics is found, it means that the mechanism has mobile DOF. In order to prove that the mechanism is zero-DOF, one has to prove that the kinematics does not have any solution, which is difficult in general since it never means that the solution does not exist even if a formula-manipulation program fails to find it. The proposed method is based on higher-order deviation of the kinematic mapping rather than the direct root-finding technique. It was applied to the above mechanism and succeeded to prove that it is certainly zero-DOF. The reason why the mechanism moves despite it does not have mobile DOF in theory is also discussed.

Key Words : Parallel mechanism, Mobility analysis, High-order differential, Constraint singularity

1. はじめに

図1は、筆者ら⁽¹⁾⁽²⁾が開発したパラレルリンク機構である。ベースプレートとエフェクタプレートを、両端にユニバーサルジョイントを持つ3本のロッドで連結した構造であるため、3-UUパラレル機構と呼んでいる。Tsaiら⁽³⁾の3-UPU機構に似るが、ロッドが直動の自由度を持たないこと、およびロッド両端のベースおよびエフェクタへの取り付け角度が180°ずれている点が異なる。鉛直方向荷重に対する高い剛性を有しながら、任意の方向に90度近くまで傾斜できる特長を持つ。重い上半身を支えながら大きく可動する人型ロボットの腰部や、大型カメラ、アンテナ、投光器等の能動支持台として応用されることを期待している。

本機構の開発は、実物の製作が先行した。教育用ブロックを用いて作成した模型が十分可動することを確認した後、設計・試作を行った。並行して運動学解析、特に逆運動学の求解を試みたが、その過程で、理論上可動しない(自由度が零である)可能性が浮上した。具体的には、Maple⁽⁴⁾およびRisa/Asir⁽⁵⁾を用いてGröbner基底による自由度解析を試みたところ、いずれのソフトウェアも長時間ループに陥り解を得ることができなかった。

ある機構が零自由度である、すなわち可動しないこと

^{*1} 大阪大学大学院工学研究科知能・機能創成工学専攻(〒565-0871 大阪府吹田市山田丘2-1) zhidao@ieee.org

^{*2} 大阪大学大学院工学研究科知能・機能創成工学専攻修了



Fig. 1 A Zero-DOF 3-UU parallel mechanism⁽²⁾

の証明は、一般的にある機構が可動することを証明するよりも困難である。運動学の解が一つでも存在すれば、その機構は可動する。逆に機構が可動しないことは、運動学に解が存在しないことを証明しなければならない。運動学を人力で解くことがほとんど不可能な複雑な機構の場合、求解を数式処理プログラムに頼らざるを得ない。しかし、あるプログラムが解を求められないことを以て、解が存在しないことの証明とすることはできない。単純にアルゴリズム上の不備やメモリ不足等の問題で、そのプログラムが求解に失敗する可能性を捨て切れないからである。プログラムに瑕疵が無いことの証明は、理論的

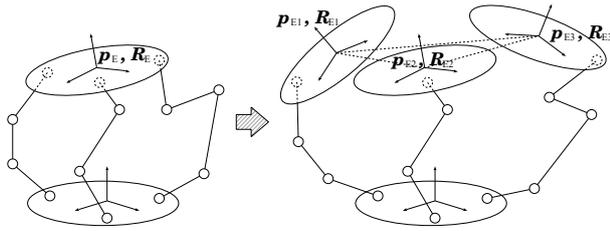


Fig. 2 Cut-and-branched parallel mechanism with virtually duplicated effectors

に不可能であることがよく知られている⁽⁶⁾。事実大可動する機構を目の前に置きながら、その理論上の可動性(非可動性)を判定する方法から議論を開始しなければならないことは、筆者らにとって非常な驚きであった。

本稿では、運動学の直接的求解を試みることによって機構の可動性を判定するのではなく、運動学写像の高階微分を用いて機構が可動しないことを証明する方法を、新たに提案する。同方法を用いて、3-UU パラレル機構が確かに理論上非可動であることを証明する。同時に、理論上非可動であるにも関わらずなぜ実物が大可動するのか、考察を行う。

2. 高次微分によるパラレルリンク機構の非可動性証明

本節では、そもそもリンク機構が可動するとはどういうことか確認しながら、最終的に運動学写像の高階微分を用いた機構の非可動性証明が可能であることを示す。

図2左のように、ベースから N 本の開リンクが分岐し同一のエフェクタに結合しているパラレルリンク機構 M を考える。ベース座標系に対するエフェクタ座標系の位置を $\mathbf{p}_E \in \mathbb{R}^3$ 、姿勢を $\mathbf{R}_E \in SO(3)$ 、 i 番目開リンク ($i = 1, \dots, N$) に含まれる n_i 個の対偶の変位の組を $\mathbf{q}_i = (q_{i1}, \dots, q_{in_i})$ 、機構全体の対偶の変位の組を $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ とそれぞれおく。同図右のように、仮想的にエフェクタが複製されて N 本の開リンクの先にそれぞれ別個に連結していると考え、 i 番目の開リンクの先に連結しているエフェクタの位置を $\mathbf{p}_{Ei} \in \mathbb{R}^3$ 、姿勢を $\mathbf{R}_{Ei} \in SO(3)$ とそれぞれおく。このとき、

$$\mathbf{p}_{Ei} = \mathbf{p}_{Ei}(\mathbf{q}_i) \quad (1)$$

$$\mathbf{R}_{Ei} = \mathbf{R}_{Ei}(\mathbf{q}_i) \quad (2)$$

と表せる。

【定義1:機構成立条件】

\mathbf{q} についての連立方程式

$$\mathbf{p}_{E1}(\mathbf{q}_1) = \dots = \mathbf{p}_{EN}(\mathbf{q}_N) \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_{E1}(\mathbf{q}_1) = \dots = \mathbf{R}_{EN}(\mathbf{q}_N) \quad (4)$$

が解 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ を持つとき、「機構 M は \mathbf{q}^* で成立する」と言う。

【定義2:機構可動条件】

連立方程式(3)(4)がある解 $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ を持ち、かつ \mathbf{q}^* を含むある開集合に含まれる任意の元もまた解であるとき、「機構 M は \mathbf{q}^* の近傍で可動する」と言う。また連立方程式(3)(4)の全ての解が孤立しているとき、「機構 M は可動しない」と言う。

【定理1】

機構 M が \mathbf{q}^* の近傍で可動するならば、次式を満たす非零の $\delta \mathbf{q}$ が存在する。

$$\delta \mathbf{p}_{E1}(\mathbf{q}_1^*, \delta \mathbf{q}_1) = \dots = \delta \mathbf{p}_{EN}(\mathbf{q}_N^*, \delta \mathbf{q}_N) \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{R}_{E1}(\mathbf{q}_1^*, \delta \mathbf{q}_1) = \dots = \delta \mathbf{R}_{EN}(\mathbf{q}_N^*, \delta \mathbf{q}_N) \quad (6)$$

証明: $\mathbf{p}_{Ei}(\mathbf{q}_i)$ 、 $\mathbf{R}_{Ei}(\mathbf{q}_i)$ はともに \mathbf{q}_i の三角関数およびその加減乗算のみで構成され、いずれも C^∞ 級であることより明らか。

【補題1】

定理1の逆は真ではない。

【系1】

機構 M が \mathbf{q}^* の近傍で可動するならば、次式を満たす非零の $\delta \mathbf{q}$ が存在する(定理1の別表現)。

$$\mathbf{J}_{E1}(\mathbf{q}_1^*) \delta \mathbf{q}_1 = \dots = \mathbf{J}_{EN}(\mathbf{q}_N^*) \delta \mathbf{q}_N \quad (7)$$

ただし、 $\mathbf{J}_{Ei}(\mathbf{q}_i) = [\mathbf{j}_{Ei1} \dots \mathbf{j}_{Eini}]$ ($i = 1, \dots, N$) は次式を満たす基礎ヤコビ行列である。

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}_E \\ \delta \mathbf{r}_E \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{Ei}(\mathbf{q}_i) \delta \mathbf{q}_i \quad (8)$$

$\delta \mathbf{r}_E$ はエフェクタの無限小回転ベクトルであり、次式を満たす。

$$\delta \mathbf{R}_E = \delta \mathbf{r}_E \times \mathbf{R}_E \quad (9)$$

【系2】

機構 M が \mathbf{q}^* において成立し、かつ式(7)を満たす非零の $\delta \mathbf{q}$ が存在しないならば、機構 M は \mathbf{q}^* 近傍で可動しない(系1の対偶)。

【定理2】

機構 M が \mathbf{q}^* 近傍で可動するならば、任意の正数 m に対し次式を満たす非零の $\{\delta^l \mathbf{q}\}$ ($l = 1, \dots, m$) が存在する。

$$\begin{aligned} \delta^m \mathbf{p}_{E1}(\mathbf{q}_1^*, \delta \mathbf{q}_1, \dots, \delta^m \mathbf{q}_1) \\ = \dots = \delta^m \mathbf{p}_{EN}(\mathbf{q}_N^*, \delta \mathbf{q}_N, \dots, \delta^m \mathbf{q}_N) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \delta^m \mathbf{R}_{E1}(\mathbf{q}_1^*, \delta \mathbf{q}_1, \dots, \delta^m \mathbf{q}_1) \\ = \dots = \delta^m \mathbf{R}_{EN}(\mathbf{q}_N^*, \delta \mathbf{q}_N, \dots, \delta^m \mathbf{q}_N) \end{aligned} \quad (11)$$

証明: 定理 1 に同じ.

【補題 2】

機構 M が \mathbf{q}^* で成立し, かつある正数 m に対して次式を満たす非零の $\{\mathbf{q}^{(l)*}\}$ ($l = 0, \dots, m-1$) が存在するものとする (ただし, $\mathbf{q}^{(0)*} = \mathbf{q}^*$ とする).

$$\begin{aligned} & \delta^{m-1} \mathbf{p}_{E1}(\mathbf{q}_1^{(0)*}, \mathbf{q}_1^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_1^{(m-1)*}) \\ & = \dots = \delta^{m-1} \mathbf{p}_{EN}(\mathbf{q}_N^{(0)*}, \mathbf{q}_N^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_N^{(m-1)*}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \delta^{m-1} \mathbf{r}_{E1}(\mathbf{q}_1^{(0)*}, \mathbf{q}_1^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_1^{(m-1)*}) \\ & = \dots = \delta^{m-1} \mathbf{r}_{EN}(\mathbf{q}_N^{(0)*}, \mathbf{q}_N^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_N^{(m-1)*}) \end{aligned} \quad (13)$$

この機構が \mathbf{q}^* 近傍で可動するならば, 次式を満たす非零の $\delta^m \mathbf{q}$ が存在する.

$$\begin{aligned} & \delta^m \mathbf{p}_{E1}(\mathbf{q}_1^{(0)*}, \mathbf{q}_1^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_1^{(m-1)*}, \delta^m \mathbf{q}_1) \\ & = \dots = \delta^m \mathbf{p}_{EN}(\mathbf{q}_N^{(0)*}, \mathbf{q}_N^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_N^{(m-1)*}, \delta^m \mathbf{q}_N) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \delta^m \mathbf{r}_{E1}(\mathbf{q}_1^{(0)*}, \mathbf{q}_1^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_1^{(m-1)*}, \delta^m \mathbf{q}_1) \\ & = \dots = \delta^m \mathbf{r}_{EN}(\mathbf{q}_N^{(0)*}, \mathbf{q}_N^{(1)*}, \dots, \mathbf{q}_N^{(m-1)*}, \delta^m \mathbf{q}_N) \end{aligned} \quad (15)$$

【系 3】

機構 M が \mathbf{q}^* で成立し, かつある正数 m に対して方程式 (12) (13) を満たす解 $\{\mathbf{q}^{(l)*}\}$ ($l = 0, \dots, m-1$) が存在するものとする. このとき, 方程式 (14) (15) を満たす非零の $\delta^m \mathbf{q}$ が存在しないならば, この機構は \mathbf{q}^* 近傍で可動しない (補題 2 の対偶).

【系 4】

機構 M が \mathbf{q}^* で成立し, かつ式 (7) を満たす非零の $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(1)*}$ が存在するものとする. この機構が \mathbf{q}^* の近傍で可動するならば, 次式を満たす非零の $\delta^2 \mathbf{q}$ が存在する (系 1 および補題 2 より明らか).

$$\mathbf{J}_{E1}(\mathbf{q}_1^*) \delta^2 \mathbf{q}_1 + \mathbf{a}_{E1}^{(2)} = \dots = \mathbf{J}_{EN}(\mathbf{q}_N^*) \delta^2 \mathbf{q}_N + \mathbf{a}_{EN}^{(2)} \quad (16)$$

ただし,

$$\mathbf{a}_{Ei}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}_{Ei}(\mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_i^{(1)*}) \mathbf{q}_i^{(1)*} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{Ei}(\mathbf{q}_i, \delta \mathbf{q}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{Ei1} & \mathbf{k}_{Ei2} & \dots & \mathbf{k}_{Eini} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{k}_{Eij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{j}_{Eij}}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i \quad (19)$$

とそれぞれおいた.

【系 5】

機構 M が \mathbf{q}^* で成立し, かつある正数 m に対して次式を満たす非零の $\{\mathbf{q}^{(l)*}\}$ ($l = 0, \dots, m-1$) および $\{\mathbf{a}_{Ei}^{(m-1)*}\}$ が存在するものとする.

$$\mathbf{J}_{E1}(\mathbf{q}_1^*) \mathbf{q}_1^{(m-1)*} + \mathbf{a}_{E1}^{(m-1)*} = \dots = \mathbf{J}_{EN}(\mathbf{q}_N^*) \mathbf{q}_N^{(m-1)*} + \mathbf{a}_{EN}^{(m-1)*} \quad (20)$$

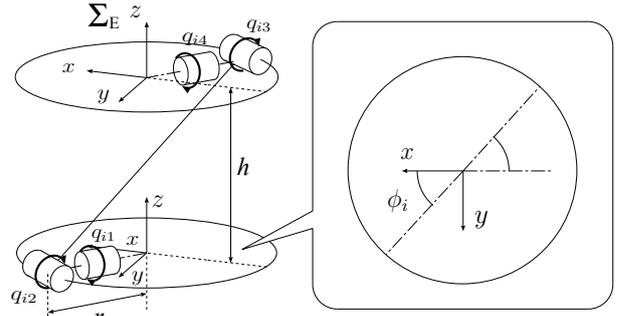


Fig. 3 Single rod of the 3-UU parallel mechanism

この機構が \mathbf{q}^* 近傍で可動するならば, 次式を満たす非零の $\delta^m \mathbf{q}$ が存在する (補題 2 の別表現).

$$\mathbf{J}_{E1}(\mathbf{q}_1^*) \delta^m \mathbf{q}_1 + \mathbf{a}_{E1}^{(m)} = \dots = \mathbf{J}_{EN}(\mathbf{q}_N^*) \delta^m \mathbf{q}_N + \mathbf{a}_{EN}^{(m)} \quad (21)$$

ただし,

$$\mathbf{a}_{Ei}^{(m)} = \mathbf{K}_{Ei}(\mathbf{q}_i^*, \mathbf{q}_i^{(1)*}) \mathbf{q}_i^{(m-1)*} + \frac{\partial \mathbf{a}_{Ei}^{(m-1)}}{\partial \mathbf{q}_i} \mathbf{q}_i^{(1)*} \quad (22)$$

である.

【系 6】

機構 M が \mathbf{q}^* で成立し, かつ式 (20) を満たす非零の $\{\mathbf{q}^{(l)*}\}$ ($l = 0, \dots, m-1$) および $\{\mathbf{a}_{Ei}^{(m-1)*}\}$ が存在するものとする. 式 (21) を満たす非零の $\delta^m \mathbf{q}$ が存在しないならば, 機構 M は \mathbf{q}^* の近傍で可動しない (系 5 の対偶).

方程式 (21) は $\delta^m \mathbf{q}$ に関する線形連立方程式であり, 容易に解けることに注意されたい. 以上に基づけば, \mathbf{q}^* で成立する機構 M がその近傍で可動しないことは, 次の方法によって判定可能である.

1. $m = 1$, $\mathbf{a}_{Ei}^{(1)} = \mathbf{0}$ ($i = 1, \dots, N$) とする.
2. 方程式 (21) を解く.
3. 非零の解 $\delta^m \mathbf{q}$ が存在しなければ, 機構 M は非可動であると判定し終了.
4. $\mathbf{q}^{(m)*} = \delta^m \mathbf{q}$, $m \leftarrow m + 1$ とし, 式 (22) により $\{\mathbf{a}_{Ei}^{(m)}\}$ ($i = 1, \dots, N$) を求めた後, 2 に戻る.

ただし, この方法では逆に機構が可動することを証明できない点に注意する必要がある (機構が可動する場合には, 上記の方法は終了しない). 機構が非可動であるとの推測ができた上で, 確証を得るための手段と考えるべきである.

3. 3-UU パラレル機構の非可動性証明

前章の議論を踏まえ, 3-UU 機構の非可動性を証明しよう. 図 3 左に, 3-UU 機構を構成する i 番目の脚の対偶配置を示す. 4 つの対偶の変位をベース側からそれぞれ

れ q_{i1} , q_{i2} , q_{i3} , q_{i4} とおく。脚の第1軸は同図中央のようにベース方位角に対し偏角 ϕ_i を以て取り付けられ、第4軸は $\phi_i + \pi$ の偏角を以てエフェクタ座標系に向かう。ただし $\phi_1 = 2\pi/3$, $\phi_2 = 4\pi/3$, $\phi_3 = 0$ である。エフェクタ座標系の原点位置ベクトル \mathbf{p}_{Ei} および姿勢行列 \mathbf{R}_{Ei} は次のようになる。

$$\mathbf{p}_{Ei} = \mathbf{R}_i^i \mathbf{p}_{Ei} \quad (23)$$

$$\mathbf{R}_{Ei} = \mathbf{R}_i^i \mathbf{R}_{Ei} \mathbf{R}_i^T \quad (24)$$

$${}^i \mathbf{p}_{Ei} = \begin{bmatrix} r(1 - 2c_{i2} + c_{i23}) + hs_{i2} \\ (2rs_{i2} - rs_{i23} + hc_{i2})s_{i1} \\ (2rs_{i2} - rs_{i23} + hc_{i2})c_{i1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$${}^i \mathbf{R}_{Ei} = \begin{bmatrix} c_{i23} & -s_{i23}s_{i4} & s_{i23}c_{i4} \\ -s_{i1}s_{i23} & -s_{i1}c_{i23}s_{i4} + c_{i1}c_{i4} & s_{i1}c_{i23}c_{i4} + c_{i1}s_{i4} \\ -c_{i1}s_{i23} & -c_{i1}c_{i23}s_{i4} - s_{i1}c_{i4} & c_{i1}c_{i23}c_{i4} - s_{i1}s_{i4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

ただし, $s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sin q_{ij}$, $c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \cos q_{ij}$ ($j = 1, \dots, 4$), $s_{i23} \stackrel{\text{def}}{=} \sin(q_{i2} - q_{i3})$, $c_{i23} \stackrel{\text{def}}{=} \cos(q_{i2} - q_{i3})$ とそれぞれおいた。基礎ヤコビ行列は,

$$\mathbf{J}_{Ei} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^i \mathbf{J}_{LEi} \\ \mathbf{R}_i^i \mathbf{J}_{AEi} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$${}^i \mathbf{J}_{LEi} = \begin{bmatrix} 0 & r(2s_{i2} - s_{i23}) + hc_{i2} & rs_{i23} & 0 \\ b_{i1}c_{i1} & b_{i2}s_{i1} & rc_{i23}s_{i1} & 0 \\ -b_{i1}s_{i1} & b_{i2}c_{i1} & rc_{i23}c_{i1} & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$${}^i \mathbf{J}_{AEi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -c_{i23} \\ 0 & c_{i1} & -c_{i1} & s_{i1}s_{i23} \\ 0 & -s_{i1} & s_{i1} & c_{i1}s_{i23} \end{bmatrix} \quad (30)$$

となる。ただし, $b_{i1} \stackrel{\text{def}}{=} 2rs_{i2} - rs_{i23} + hc_{i2}$, $b_{i2} \stackrel{\text{def}}{=} 2rc_{i2} - rc_{i23} - hs_{i2}$ とそれぞれおいた。

この機構は $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ において明らかに成立する。このとき基礎ヤコビ行列は i によらず

$${}^i \mathbf{J}_{LEi} = {}^0 \mathbf{J}_{LE} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & h & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & r & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^i \mathbf{J}_{AEi} = {}^0 \mathbf{J}_{AE} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり, 方程式(21)は次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} {}^0 \mathbf{J}_{LE} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_1^T \mathbf{J}_{LE} \\ {}^0 \mathbf{J}_{AE} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_1^T \mathbf{J}_{AE} \\ \mathbf{0} & {}^0 \mathbf{J}_{LE} & -\mathbf{R}_2^T \mathbf{J}_{LE} \\ \mathbf{0} & {}^0 \mathbf{J}_{AE} & -\mathbf{R}_2^T \mathbf{J}_{AE} \end{bmatrix} \delta^m \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{L1}^{(m)} \\ \mathbf{y}_{A1}^{(m)} \\ \mathbf{y}_{L2}^{(m)} \\ \mathbf{y}_{A2}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{Li}^{(m)} \\ \mathbf{y}_{Ai}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_i^T \end{bmatrix} (\mathbf{a}_{E3}^{(m)} - \mathbf{a}_{Ei}^{(m)}) \quad (32)$$

($i = 1, 2$) とおいた。 \mathbf{R}_3 が単位行列であることに注意されたい。 $S \stackrel{\text{def}}{=} \sin \phi_1$, $C \stackrel{\text{def}}{=} \cos \phi_1$ とおくと, 左辺の係数行列は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -hS & -hC & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -hC & hS & 0 & 0 \\ 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & -r & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S & S & C \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S & -C & C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & hS & -hC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 0 & -hC & -hS & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r & 0 & 0 & -r & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & C & S & -S & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & S & -C & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

6行目および12行目の成分が全て0であり, 残りの行は全て互いに線形独立である。したがって同行列のランクは10であり, 方程式(31)が解を持つための必要十分条件は, 明らかに $\mathbf{y}_{A1}^{(m)}$ および $\mathbf{y}_{A2}^{(m)}$ の第3成分がともに零であることである。またこのとき, 非零の解が存在することも同時に保証される。

以上で, 前節の方法を用いる準備が整った。これより実際に適用する。

$m = 1$ のとき)

$\mathbf{a}_{A1}^{(1)} = \mathbf{a}_{A2}^{(1)} = \mathbf{a}_{A3}^{(1)} = \mathbf{0}$ より $\mathbf{y}_{L1}^{(1)} = \mathbf{y}_{A1}^{(1)} = \mathbf{y}_{L2}^{(1)} = \mathbf{y}_{A2}^{(1)} = \mathbf{0}$ であるので, 方程式(31)は解を持つ。実際, 一般解 $\delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(1)*}$ は次のように求まる。

$$\mathbf{q}^{(1)*} = \begin{bmatrix} S & -C & C & S & -S & -CC & -S0 & -1 & 1 & 0 \\ C & S & -SC & C & -SS & C & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

ただし, v_1, v_2 は任意の実数である。これらのうち少なくとも一方が非零であれば解は非零となる。

$m = 2$ のとき)

$$\mathbf{y}_{L1}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2r(2Cv_1 - Sv_2)Sv_2 \\ 2rSv_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{A1}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_{L2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2r(2Cv_1 + Sv_2)Sv_2 \\ -2rSv_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{A2}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる（途中計算は省略）． $\mathbf{y}_{A1}^{(2)}$ 、 $\mathbf{y}_{A2}^{(2)}$ がともに零なので、方程式(31)は解を持つ．実際、一般解 $\delta^2 \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(2)*}$ は次のように求まる．

$$\mathbf{q}^{(2)*} = \frac{2r}{h} \begin{bmatrix} Sv_1^2 + 2(2Cv_1 - Sv_2)Cv_2 \\ (2Cv_1 - Sv_2)Sv_2 \\ -(2Cv_1 - Sv_2)Sv_2 \\ -Sv_1^2 \\ -Sv_1^2 + 2(2Cv_1 - Sv_2)Cv_2 \\ -(2Cv_1 - 3Sv_2)Sv_2 \\ (2Cv_1 - 3Sv_2)Sv_2 \\ Sv_1^2 \\ 2(2Cv_1 - Sv_2)v_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & C \\ -C & S \\ C & -S \\ S & C \\ -S & C \\ -C & -S \\ C & S \\ -S & C \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

ただし、 a_1 、 a_2 は任意の実数である． v_1 、 v_2 、 a_1 、 a_2 のうち少なくとも一つが非零ならば解は非零となる．

$m = 3$ のとき

$$\mathbf{y}_{A1}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}(5\sqrt{3}v_1^3 + 21v_1^2v_2 - 11\sqrt{3}v_1v_2^2 - 3v_2^3) \\ -\frac{1}{8}(15v_1^3 - 7\sqrt{3}v_1^2v_2 - 33v_1v_2^2 + \sqrt{3}v_2^3) \\ -\frac{r}{h}(6v_1^3 - 5\sqrt{3}v_1^2v_2 - 12v_1v_2^2 + \sqrt{3}v_2^3) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_{A2}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(\sqrt{3}v_1^3 - 9v_1^2v_2 - 7\sqrt{3}v_1v_2^2 + 3v_2^3) \\ -\frac{1}{2}(3v_1^3 + \sqrt{3}v_1^2v_2 - 9v_1v_2^2 - \sqrt{3}v_2^3) \\ -\frac{r}{h}(3v_1^3 - 11\sqrt{3}v_1^2v_2 - 9v_1v_2^2 + \sqrt{3}v_2^3) \end{bmatrix} \quad (37)$$

となる（途中計算および $\mathbf{y}_{L1}^{(3)}$ 、 $\mathbf{y}_{L2}^{(3)}$ は省略）．ただし、 $S = \sqrt{3}/2$ 、 $C = -1/2$ を代入した．これらの第3成分を抜き出し、次の連立方程式を構成する．

$$6v_1^3 - 5\sqrt{3}v_1^2v_2 - 12v_1v_2^2 + \sqrt{3}v_2^3 = 0 \quad (38)$$

$$3v_1^3 - 11\sqrt{3}v_1^2v_2 - 9v_1v_2^2 + \sqrt{3}v_2^3 = 0 \quad (39)$$

これは唯一の解 $(v_1, v_2) = (0, 0)$ を持つ．すなわち v_1 、 v_2 のいずれかが非零ならば、式(38) (39)を同時に満たすことはできず、方程式(31)は非零の解を持たない．

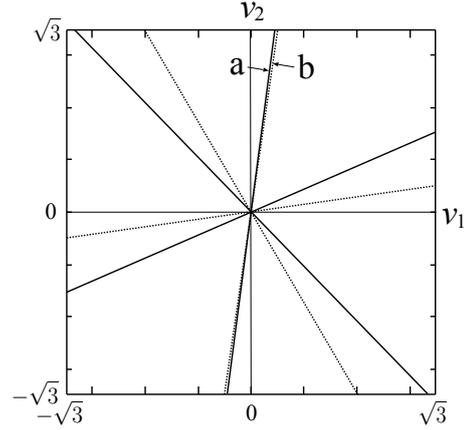


Fig. 4 Solution curves of Eq. (38) (solid line) and Eq. (39) (dashed line)

以上より、3-UU パラレル機構が可動しないことが証明された．

4. 考 察

4.1 3-UU パラレル機構はなぜ可動するのか? 前節の議論より、3-UU パラレル機構は理論上は可動しないものの、 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ において運動学写像の2階微分までは解が存在することも同時に分かった．また、図4は式(38) および式(39)を満たす (v_1, v_2) の集合（前者:実線、後者:点線）を示したものである．いずれも3本の直線から成る．これらは全て相異なり、前節で導いたように $(0, 0)$ ただ一点のみで交わる．しかし、図中のa（方程式(38)の解集合の一部）およびb（方程式(39)の解集合の一部）が近接していることも分かる．すなわち、両者がともに零になるような非零の (v_1, v_2) は存在しないが、両者をともに零に近い値にできる (v_1, v_2) が2直線a、b付近に偏在するということである．

図2のように、仮想的にエフェクタを複製してそれぞれ別の開リンクを形成していると考えたとき、それぞれの作業空間を表す多様体の積が実際のエフェクタ作業空間となる．3-UU パラレル機構では、このような積多様体は厳密には点 $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ のみとなるが、元が多様体同士は互いに $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ において曲率まで一致し、かつさらにその微分も広い範囲にわたって近い値をとると予想される．それらの差は、若干のバックラッシュや部材の微小変形により吸収されるほど小さいものであろう．これが、本機構が可動する理由として考えられる．

4.2 提案方法の意義 機構学は、本来は可動する構造を対象とする学問体系である．機構としての自由度を持たず部材変形によって可動する構造は、むしろトラスの一種と言うべきであり、従来の考え方であれば材料力学の範疇で扱われるものであろう．しかし筆者らの3-

UU パラレル機構のように、提案方法を用いなければ非可動性を判別できないほどに大きく可動する機構を解析するには、部材の剛性を陽に考えなければならないような方法は不向きであるように思われる。

変形をもたらすものが部材変形であれバックラッシュであれ、それらがわずかでも存在すれば通常の(可動自由度を持つ)機構と同様に利用できる、ということにつながる新たな運動学が議論できれば有用であろう。言うまでもなく、零自由度機構に従来と同じ方法で逆運動学の解を提供することはできない。筆者ら⁽¹⁾はこれまでに、3-UU パラレル機構に所望の傾斜角を与える駆動関節の変位と、その時のエフェクタ位置を最小二乗法によって数値的に求める、逆運動学の近似解法を提案している。

4.3 拘束特異点 3-UU パラレル機構は、回転対偶4個から成る3本のロッドでエフェクタの位置・姿勢を拘束している。対偶の自由度が12であるのに対し、拘束条件も12本あるので、よく知られたKutzbach-Grüblerの式では、この機構は零自由度と判定される。それにも関わらず、実物は2方向に大きく傾斜できるため、当初は構造的に恒久特異点を有することが疑われた。しかし前述の通り、Gröbner基底を用いた解析では運動学の解を求めることができなかつたため、同時に恒久特異点が存在するとも結論できなかつた。

Bonev, Zlatanov ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾は、Tsai ら⁽³⁾の3-UPU 機構に似たPark らの3-UPU 機構において、従来発見されていたパラレルリンク機構のどの特異点にも分類されない新たな特異点(拘束特異点)が存在し、しかもそれがなぜ特異点たり得ているのか説明できない、と報告した。

本研究によって、3-UU パラレル機構は零自由度であり、恒久特異点によって可動するのではないことが証明された。上記のBonev らの発見した現象も、同じ原理によって説明できるのではないかと予想する。

5. おわりに

運動学の求解が容易でなく理論上の自由度さえ定かでない機構の可動性を判別する—正確には、理論上非可動な機構が確かに非可動であると判定する—ための方法を新たに提案した。運動学写像の高次微分を用いるため計算の難易度は上がるが、方法は手続的に行える。実際に提案方法を用いて、筆者らの開発した3-UU パラレル機構が理論上非可動であることを証明した。同時に、それでありながらなぜ実物は大きく可動するのかについて、証明の過程で得られた計算結果に基づいて考察を行った。機構を利用する段においては、後者の方が重要な意味を持つ。可動する理由が分かれば可動させる方法の考案にもつなげやすいからである。

零自由度機構に運動学の解は存在しない。しかしその

機構が実際には可動し、有用性を持つならば、何らかの方法で解を提供する必要がある。本文中で述べた通り、筆者らは先行研究において、最小二乗法による逆運動学の近似解法を提案している。これにより求めた駆動関節変位を実際に与えたとき、得られるエフェクタ変位は所望の値に対し偏差を持つと考えられる。機構を可動させる主要因がバックラッシュである場合、この偏差の再現性が低下してしまう。バックラッシュを低減し再現性を高めた上で、偏差の補正まで考慮するのが好ましい。このことは今後も継続的に検討する予定である。

機構を可動させる主要因が部材の変形であるならば、可動範囲は(部品の干渉以外に)部材の剛性によって決定される。可動限界付近では内力が高まるため、耐荷重とのバランスを考慮した設計が求められるだろう。

提案方法を利用しなければ解析できないような機構は、現在の機構学の範疇においては極めて特殊な事例と言える。提案方法によって、そうした機構が特殊な例でなくなるような新たな機構学の潮流が創出されることが、本研究の真の狙いである。

謝 辞

3-UU パラレル機構の運動学について、北海道大学の近野敦教授、近畿大学の原田孝教授、東京工業大学の武田行生教授に有用なご意見を賜りました。ここに御礼申し上げます。

参 考 文 献

- (1) K. Shikata, K. Masuya, and T. Sugihara. Zero-DOF 3-UU parallel mechanism that inclines largely in two directions. In *Proceedings of 2014 JSME Conference on Robotics and Mechatronics*, 3P2-K02, 2014.
- (2) K. Shimoguchi and T. Sugihara. Reduction of Backlash of the 3-UU Parallel Mechanism. In *Proceedings of 2016 JSME Conference on Robotics and Mechatronics*, 2P2-13b2, 2016.
- (3) L.-W. Tsai. Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU Parallel Manipulator. *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, pp. 439–446, 2000.
- (4) <https://www.maplesoft.com/products/maple/>.
- (5) <http://jp.asir.org/>.
- (6) A. Turing. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. In *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, Vol. 42, pp. 230–265, 1937.
- (7) I. Bonev and D. Zlatanov. The Mystery of the Singular SNU Translational Parallel Robot, 2001. <http://parallelic.org/Reviews/Review004p.html>.
- (8) D. Zlatanov, I. A. Bonev, and C. Gosselin. Constraint Singularities of Parallel Mechanisms. In *Proceedings of 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 496–502, 2002.